

6) Vis hvordan man kan beregne  
markeringernes placering på  
målepinden i figur 2 og på "tapen" i  
figur 3.

Princippet i figur 2 er præcis det vi har brugt i opgave 4 og 5, men i stedet for at vi integrerer fra 0 til 32 eller 5, så bliver højden en variabel  $h$ . Derudover skal vi også konvertere det fra kubikcentimeter til mm nedbør, dette gør vi ved at dividere med 20.11. Dette giver:

$$mmregn = \frac{\pi \int_0^h \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 2^{\frac{1}{8}} \right)^x \right)^2 dx}{20.106} = mmregn = \frac{0.1562514998 \left( 2^{\frac{h}{4}} - 1 \right)}{\ln(2)}$$

Nu har vi en formel der beregner mm regn der har været efter højden af vandstanden. Vi kan lige tage et par eksempler:

Vi ville gerne lave markeringer når der har været 5 mm regn, 10 mm regn og 20 mm regn. Vi sætter funktionen lig med disse værdier og løser for højden:

$$mmregn_5 = \frac{0.1562514998 \left( 2^{\frac{h}{4}} - 1 \right)}{\ln(2)} = 5 \xrightarrow{\text{solve for h}} [[h = 18.13935832]]$$

$$mmregn_{10} = \frac{0.1562514998 \left( 2^{\frac{h}{4}} - 1 \right)}{\ln(2)} = 10 \xrightarrow{\text{solve for h}} [[h = 22.01352132]]$$

$$mmregn_{20} = \frac{0.1562514998 \left( 2^{\frac{h}{4}} - 1 \right)}{\ln(2)} = 20 \xrightarrow{\text{solve for h}} [[h = 25.94955868]]$$

Vi ved nu at når der har været 5 mm regn at højden er ca. 18.14 cm, ved 10 mm regn er den ca. 22.01 cm og ved 20 mm regn er den ca. 25.95 cm.

Den anden er lidt mere kompliceret, vi skal placere målepinden langs kanten. Vi ville gerne have samme markeringer som ved figur 2, altså ved 5mm regn, 10 mm regn og 20 mm regn. Vi har allerede bestemt hvad  $h$  er ved disse værdier, så derfor kan vi indsætte det i formlen for længde af kurve:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Vi definerer funktionen:

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \left( 2^{\frac{1}{8}} \right)^x :$$

Vi ved at integrationgrænsen er fra 0 til  $h$ :

$$V_3 = \int_0^h \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Nu kan vi bare indsætte højderne, resultatet ville så give hvor langt vi har bevæget os op af siden af regnmåleren for at opnå denne mængde regn. Vi beregner det for 5, 10 og 20 mm regn nu:

$$V_3 = \int_0^{18.13935832} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = V_3 = 18.25879877$$

$$V_3 = \int_0^{22.01352132} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = V_3 = 22.25120416$$

$$V_3 = \int_0^{25.94955868} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = V_3 = 26.42031426$$

Vi ved nu at markeringen for 5 mm regn skal placeres ca. 18.26 cm oppe, ved 10 mm regn skal den være ca. 22.25 cm oppe og ved 20 mm regn skal den være ca. 26.42 cm oppe.

Den her metode har dog sine problemer, vi har nemlig ikke en funktion hvor vi bare kan indsætte den mængde regn vi ville have, og så spytter den en højde ud hvor markeringen skal være. Sådant en funktion kan vi dog lave. I stedet for at indsætte højden i integrationsgrænsen kan vi indsætte formelen vi beregne den i. Vi skal dog først isolere  $h$ , det gør vi nu:

$$\frac{0.1562514998 \left( 2^{\frac{h}{4}} - 1 \right)}{\ln(2)} = M \xrightarrow{\text{solve for } h} [[h = -118.1648916 + 5.770780164 \ln(3.465735903 \times 10^9 M + 7.81257499 \times 10^8)]]$$

Nu har vi isoleret et udtryk for  $h$ , det kan vi nu indsætte i formelen for længde af kurve, dog skal vi først lige differentiere funktionen i stedet for at bestemme den:

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 2^{\frac{1}{8}} \right)^x \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} \frac{(2^{1/8})^x \ln(2)}{16}$$

Nu indsætter vi udtrykket for  $h$  i formelen for længde af kurve:

$$\int_0^{-118.1648916 + 5.770780164 \ln(3.465735903 \times 10^9 M + 7.81257499 \times 10^8)} \sqrt{1 + \left( \frac{(2^{1/8})^x \ln(2)}{16} \right)^2} \, dx$$

Nu har vi en formel som giver hvor langt oppe markeringen skal være. Nu kan lige teste den ved at indsætte 5 mm regn. Man erstatter " $M$ " i integrationsgrænsen med den ønskede mængde regn. Vi gør det nu:

$$\int_0^{-118.1648916 + 5.770780164 \ln(3.465735903 \times 10^9 \cdot (5) + 7.81257499 \times 10^8)} \sqrt{1 + \left( \frac{(2^{1/8})^x \ln(2)}{16} \right)^2} \, dx = 18.25879875$$

Vi kan se at vi får det samme som den anden metode, så det betyder at den virker.

